UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS III (MA-1116)
Intensivo Jul-Ago 2013

Elaborado por
Miguel Labrador
12-10423
Ing. Electrónica

Respuestas PRIMER PARCIAL Intensivo 2013 Tipo-A.

Pregunta 1: Dado el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_2 - 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + (a+1)x_3 &= b \end{aligned}$$

(a) Hallar los valores de a para que el sistema tenga solución única.

(b) Hallar todos los pares de valores (a, b) para que el sistema tenga infinitas soluciones.

(10 puntos)

Solución:

Escribimos el sistema en forma de matriz aumentada y hacemos Reducción Gaussiana.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & a+1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & a & b-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a+4 & b-5 \end{pmatrix}$$

De aquí se observa que para poder seguir con la reducción se debe cumplir que $a + 4 \neq 0$, es decir, $a \neq -4$. Si esto se cumple entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a+4 & b-5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to \frac{F_3}{a+4}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-5}{a+4} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b-5}{a+4} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 \to F_2 + 2F_3]{F_1 \to F_1 + 3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 + \dfrac{3(b-5)}{a+4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 + \dfrac{2(b-5)}{a+4} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{b-5}{a+4} \end{pmatrix}$$

Luego, hay solución única siempre que $a \neq -4$.

Si $a = -4$ y $b = 4$ el sistema nos queda como:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Escribiendo nuevamente el sistema obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 = 5 \qquad &\Longrightarrow \qquad x_1 = 5 + 3x_3 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \qquad &\Longrightarrow \qquad x_2 = 1 + 2x_3 \end{aligned}$$

Para infinitos valores de x_3 las soluciones del sistema son infinitas. Luego el sistema tiene infinitas soluciones para $(a, b) = (-4, 5)$

Pregunta 2: Calcule la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(5 puntos)

Solución:

Para calcular la inversa escribimos la siguiente matriz aumentada y reducimos con Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & | & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 5F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & | & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to -\frac{1}{30}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{30} & \frac{1}{6} & \frac{1}{15} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 11 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{30} & \frac{1}{6} & \frac{1}{15} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2 \to F_2 - 5F_3]{F_1 \to F_1 - 11F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11/30 & 1/6 & 4/15 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/30 & 1/6 & 1/15 \end{array}\right)$$

Finalmente la matriz inversa de A está dada por:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/30 & 1/6 & 4/15 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/30 & 1/6 & 1/15 \end{pmatrix}$$

Pregunta 3: Demuestre que si $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ son soluciones del sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ entonces $\vec{x}_h = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ es una solución del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$. (5 puntos)

Solución:

Si $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ son soluciones del sistema entonces se cumple:

$$A\vec{x}_1 = \vec{b} \qquad A\vec{x}_2 = \vec{b}$$

Restamos estas dos ecuaciones y nos queda:

$$\begin{aligned} A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 &= \vec{b} - \vec{b} \\ A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) &= \vec{0} && \text{(Ley Distributiva)} \\ A\vec{x}_h &= \vec{0} \end{aligned}$$

En efecto, $\vec{x}_h = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ es solución del sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$.

Nota: Este parcial fue resuelto y digitalizado por Miguel Ángel Labrador para GUIAS USB.

Miguel Ángel
12-10423
Ingeniería Electrónica
@miguelangel2801

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección miguelangel2801@gmail.com